

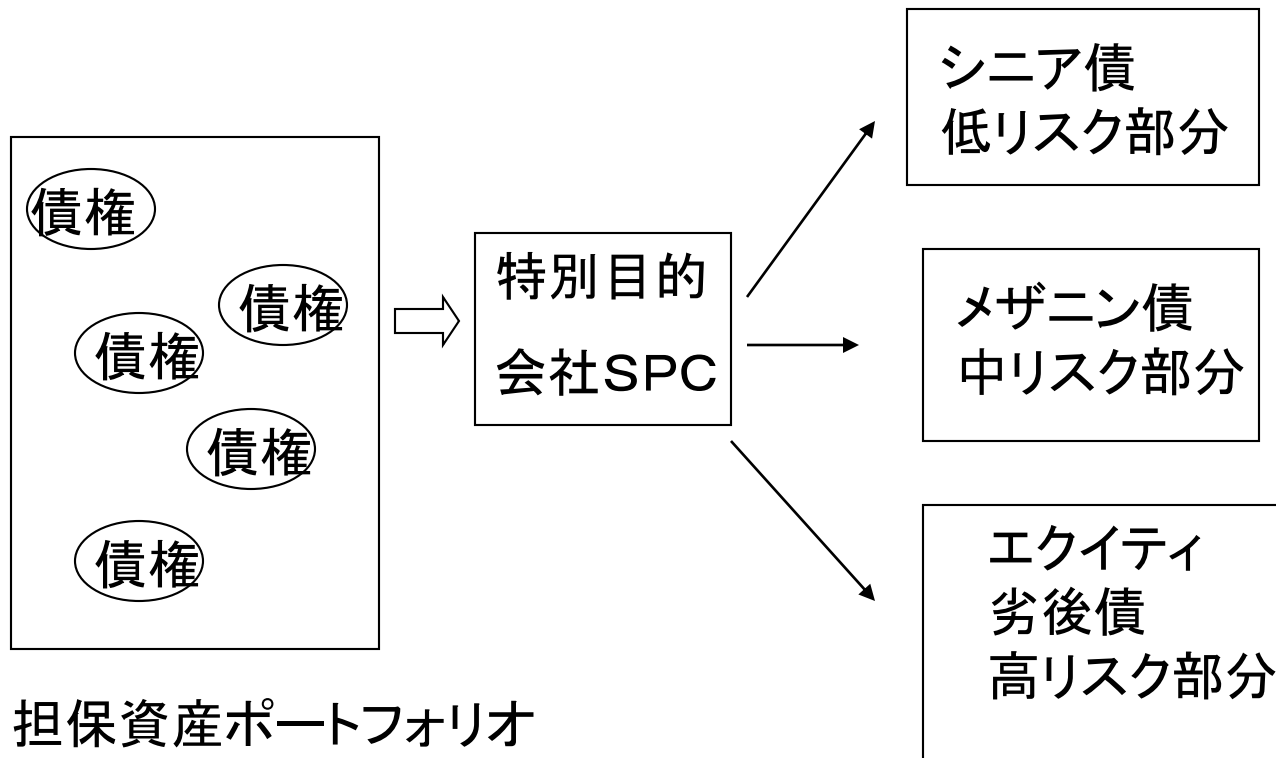
デフォルト・リスクとネットワーク

久門正人

共同研究者 北里大学 守真太郎

CDO(Collateralized Debt Obligation)

優先劣後構造→トランシェをきる
にはデフォルトの分布が必要。

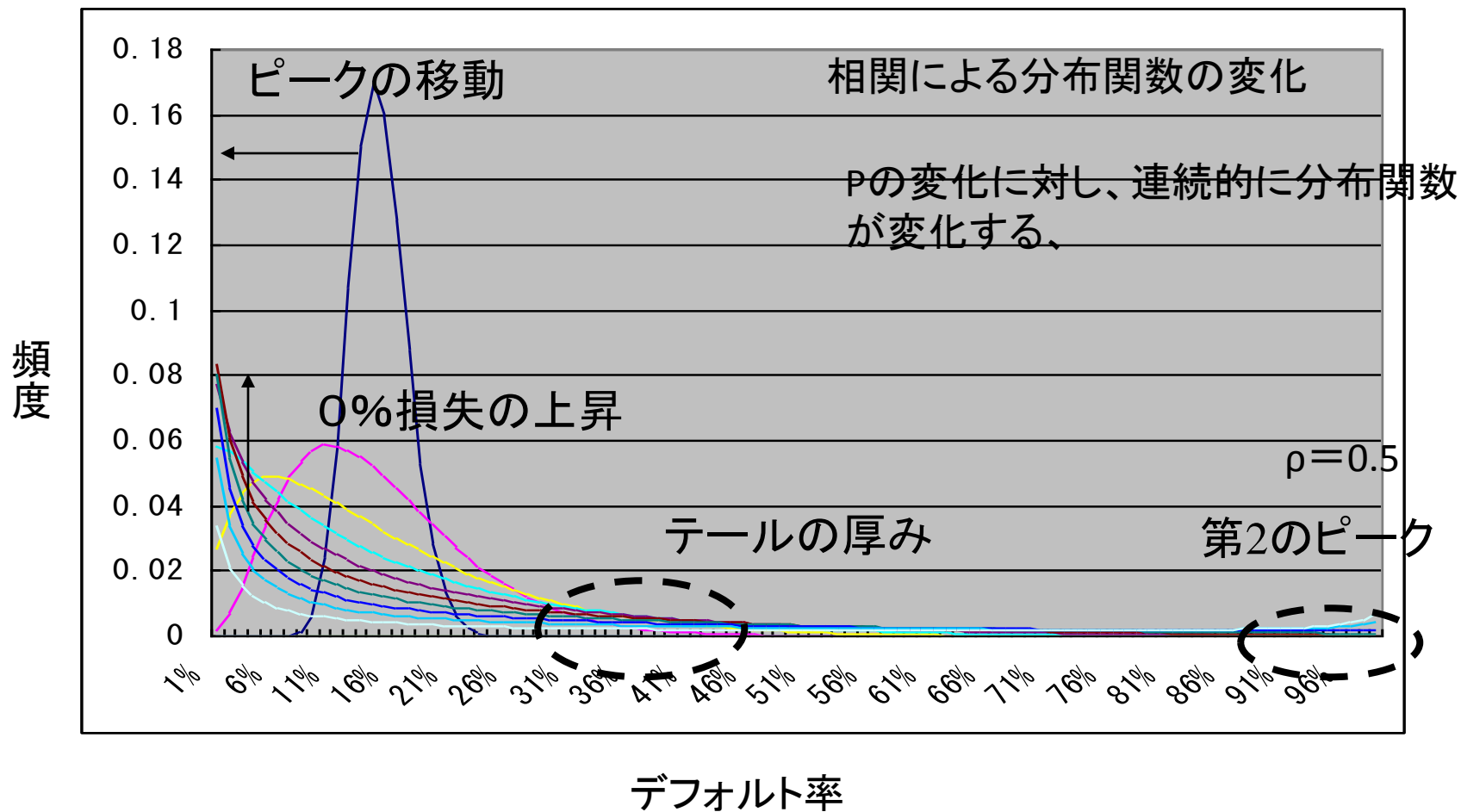


担保資産ポートフォリオ

相関による分布密度関数 (Factor Model) ~ コピュラ

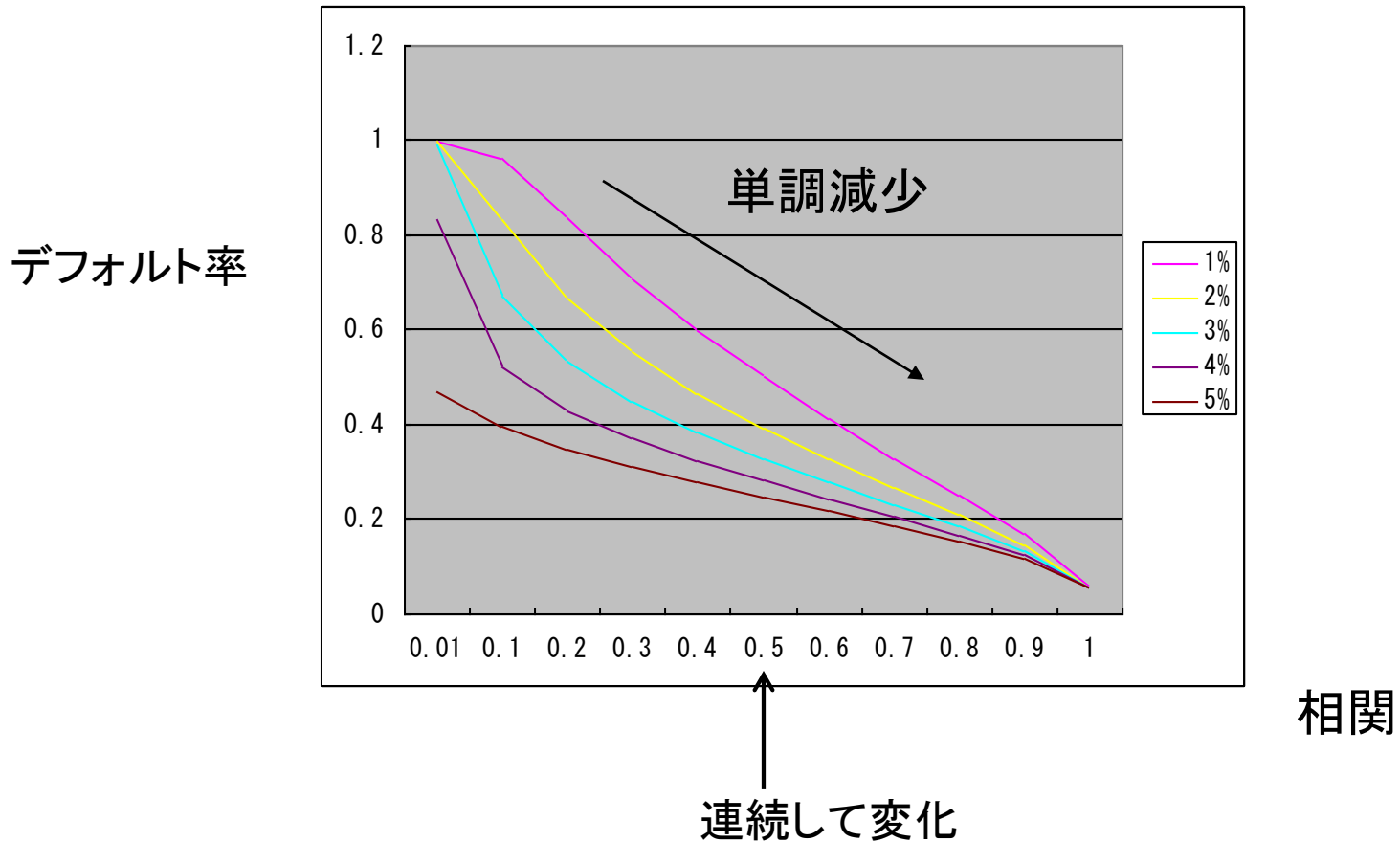
PD20%

$\rho=0$



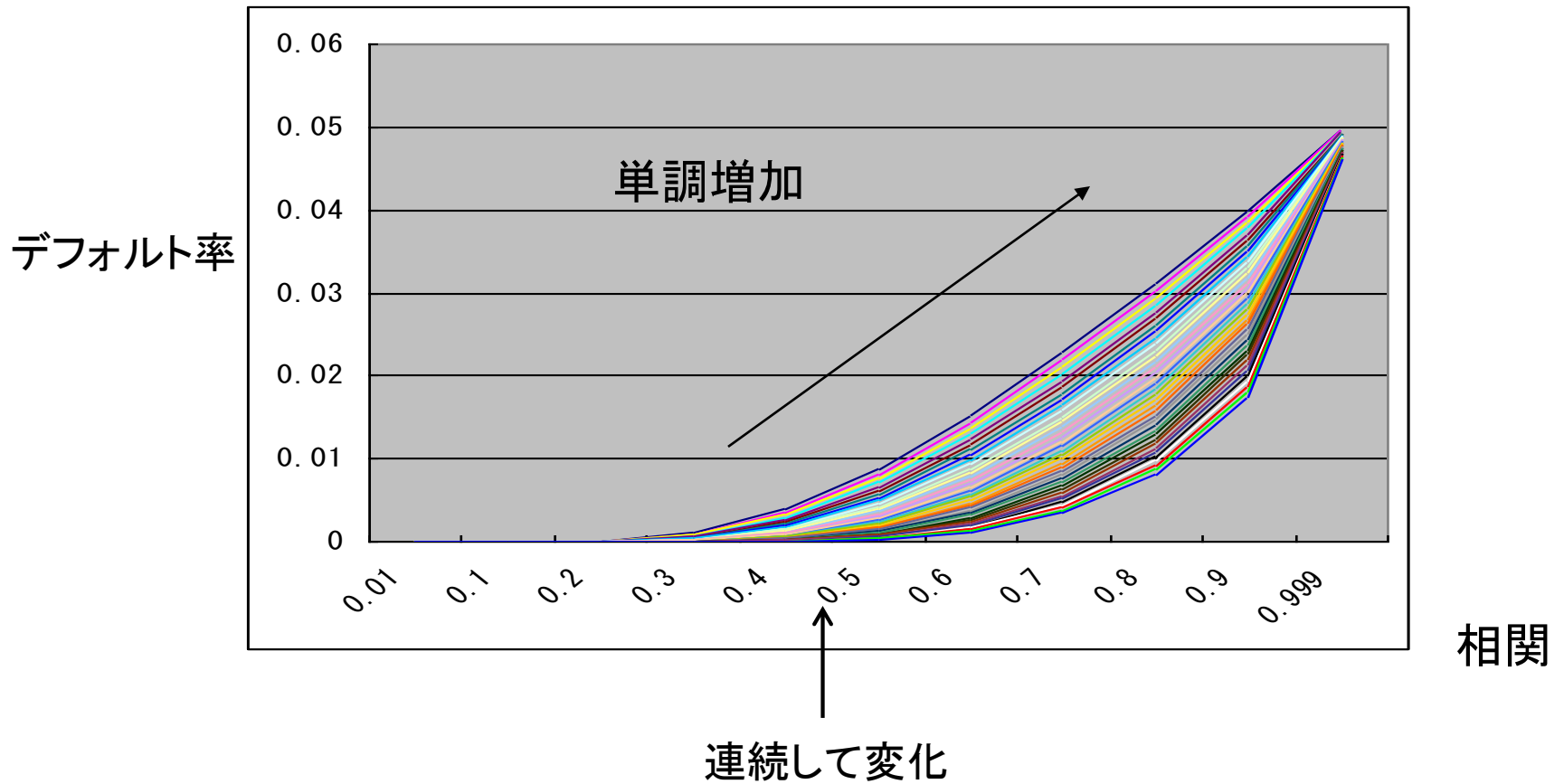
平均損失率1 (Equity)

Equity 劣後の平均損失率 (PD=5%)



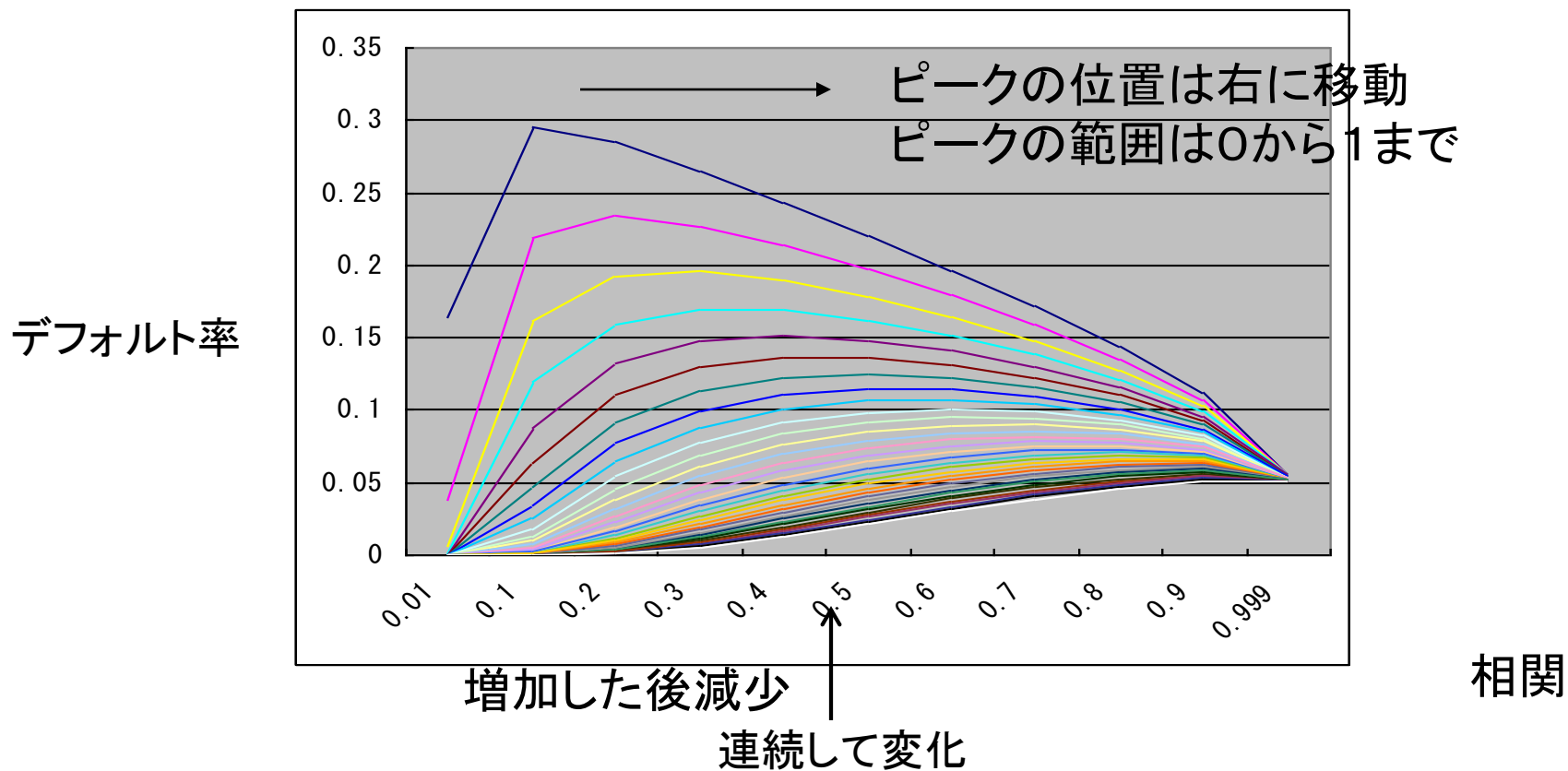
平均損失率2 (シニア)

シニア債の平均損失率(PD=5%)

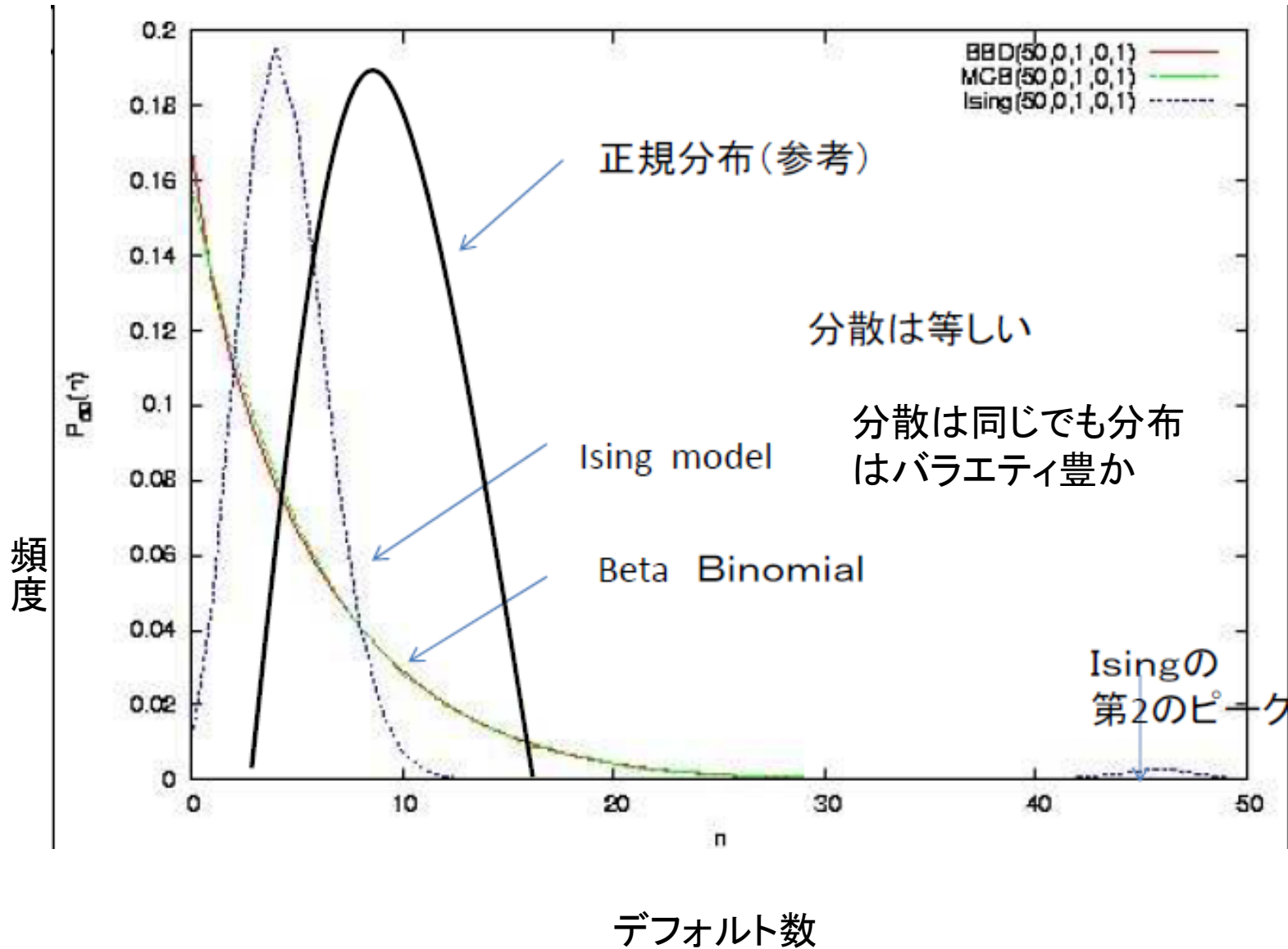


平均損失率3 (メザニン)

メザニンの平均損失率(PD=5%)



様々なモデルによる分布関数 $N=50$ $p=0.1$ $\rho=0.1$

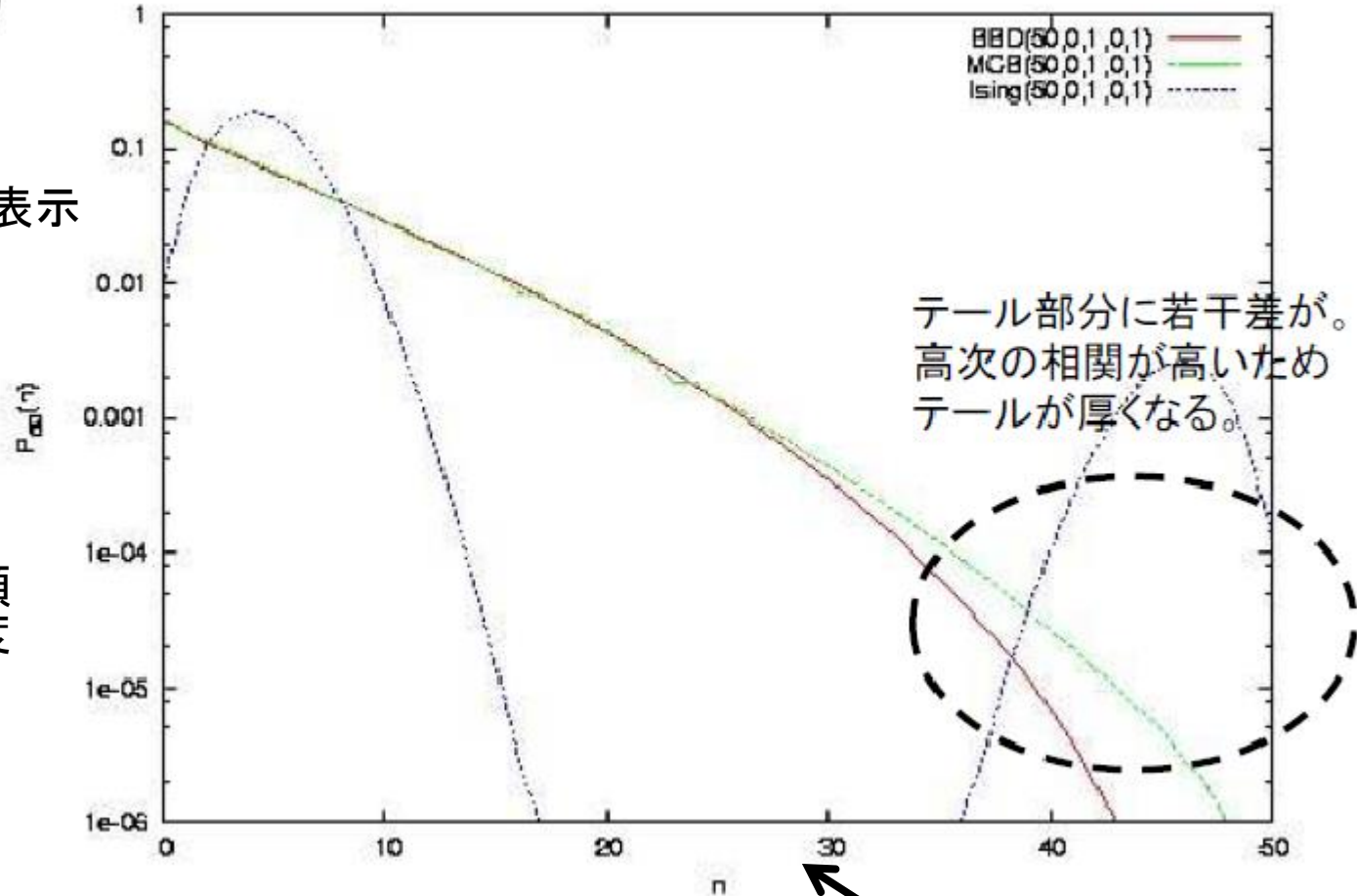


モデルによる違い。テール部分

$$P_{50}(n)$$

縦軸 Log表示

頻度



デフォルト数

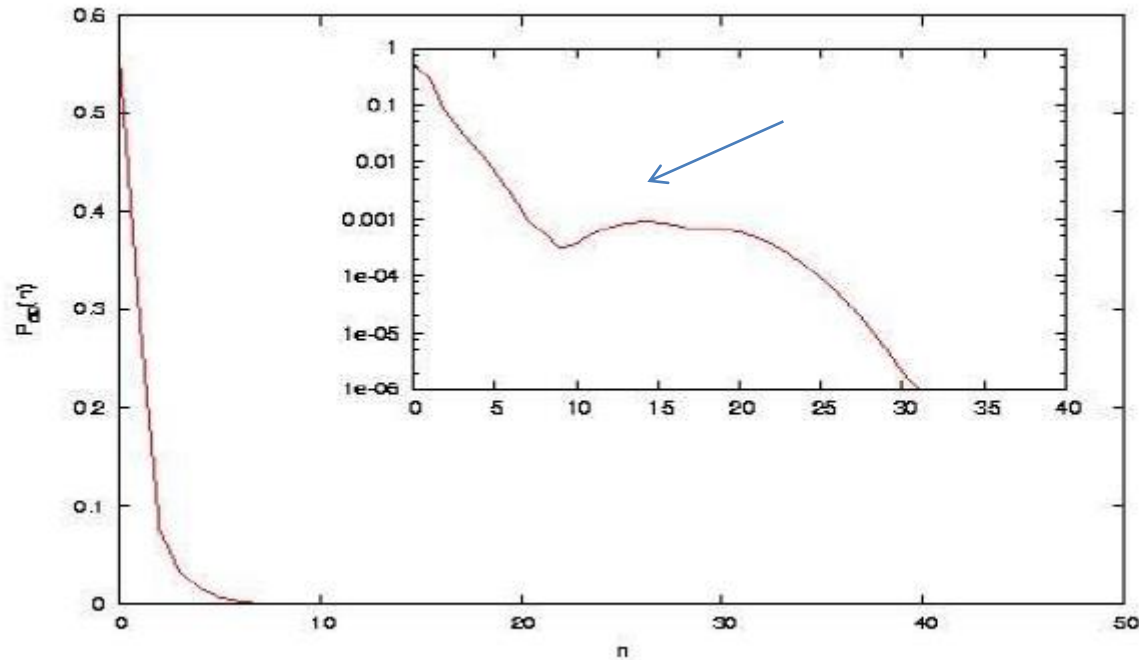
イジングの場合ここはない。

Implied Default distribution

iTraxx Japanから算出

トランシェ間の整合性がないため
凸凹する。→シニアが割高

頻度



デフォルト数

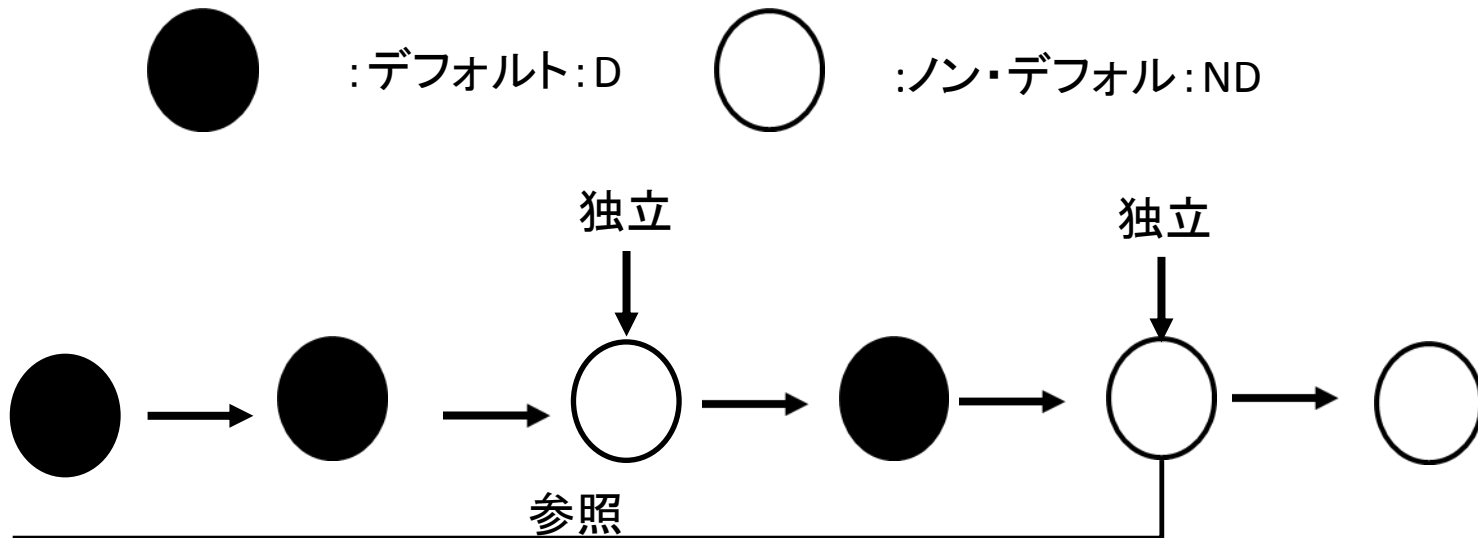
問題1

- 同じ相関係数(分散が決まる)でも様々な形状の分布になる。
- 通常用いられるのは、コピュラ \sim β 分布
- Isingモデルは他のモデルと異なり、極端な2ピークになっている。(ストレス・ケース?)
- 極端な2ピークの場合、平均デフォルト率に断絶が現れ、
トランシングすることはできない。
- リスク管理の場合も断絶がある場合はリスクのコントロールが難しくなる。

では

Q. Isingモデルの分布と β 分布の関係はどのようなものか？

マルコフ連鎖モデル



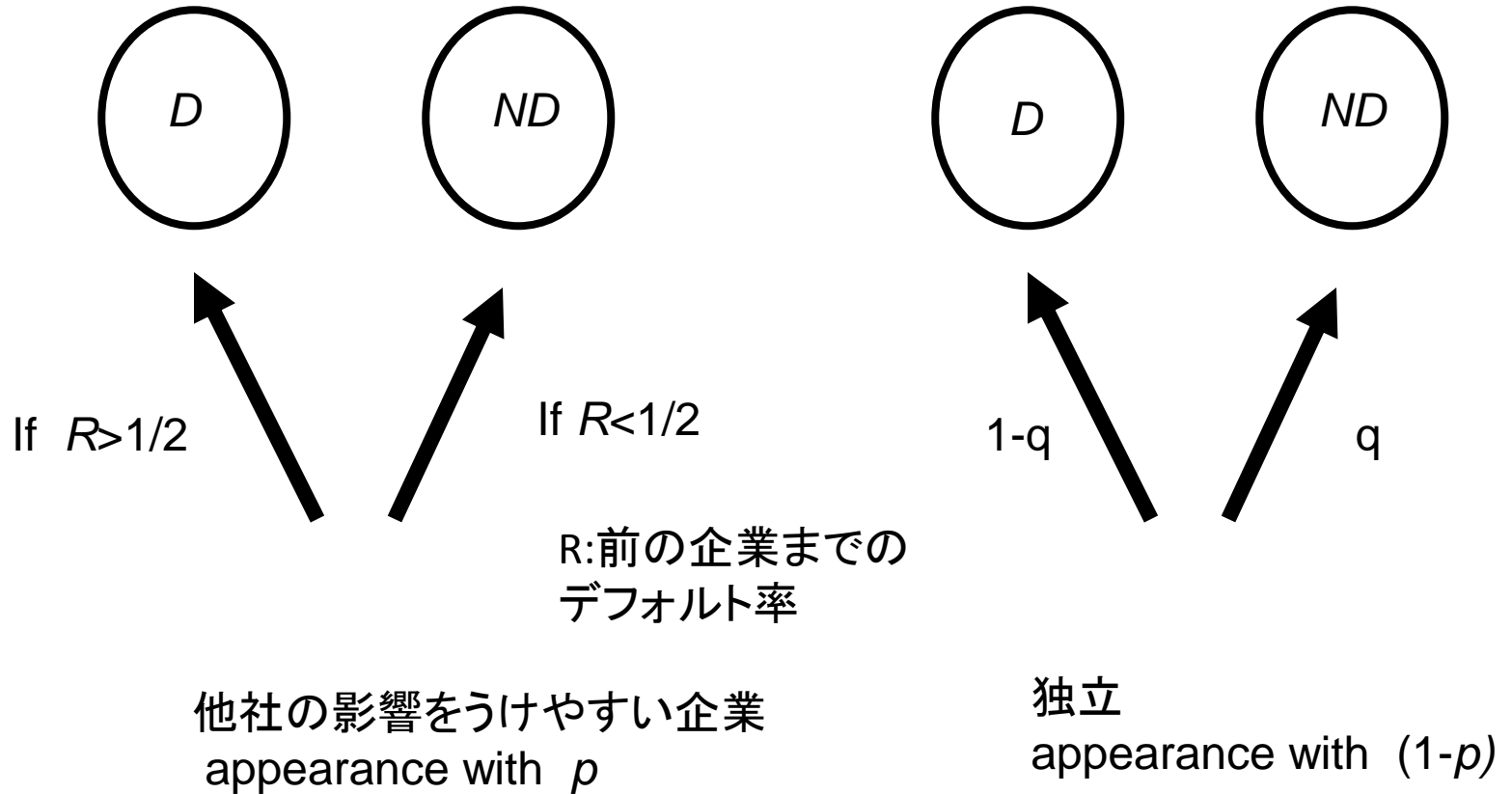
独立企業: 独立し、デフォルトするかしらないかが決定される→2項分布
他社の影響を受けやすい企業: 周辺からの影響を受けデフォルトする、しないが決定される。

Q.この場合、デフォルト分布はどのような分布に収束するか?

Note: 一企業数は無限大と考える。

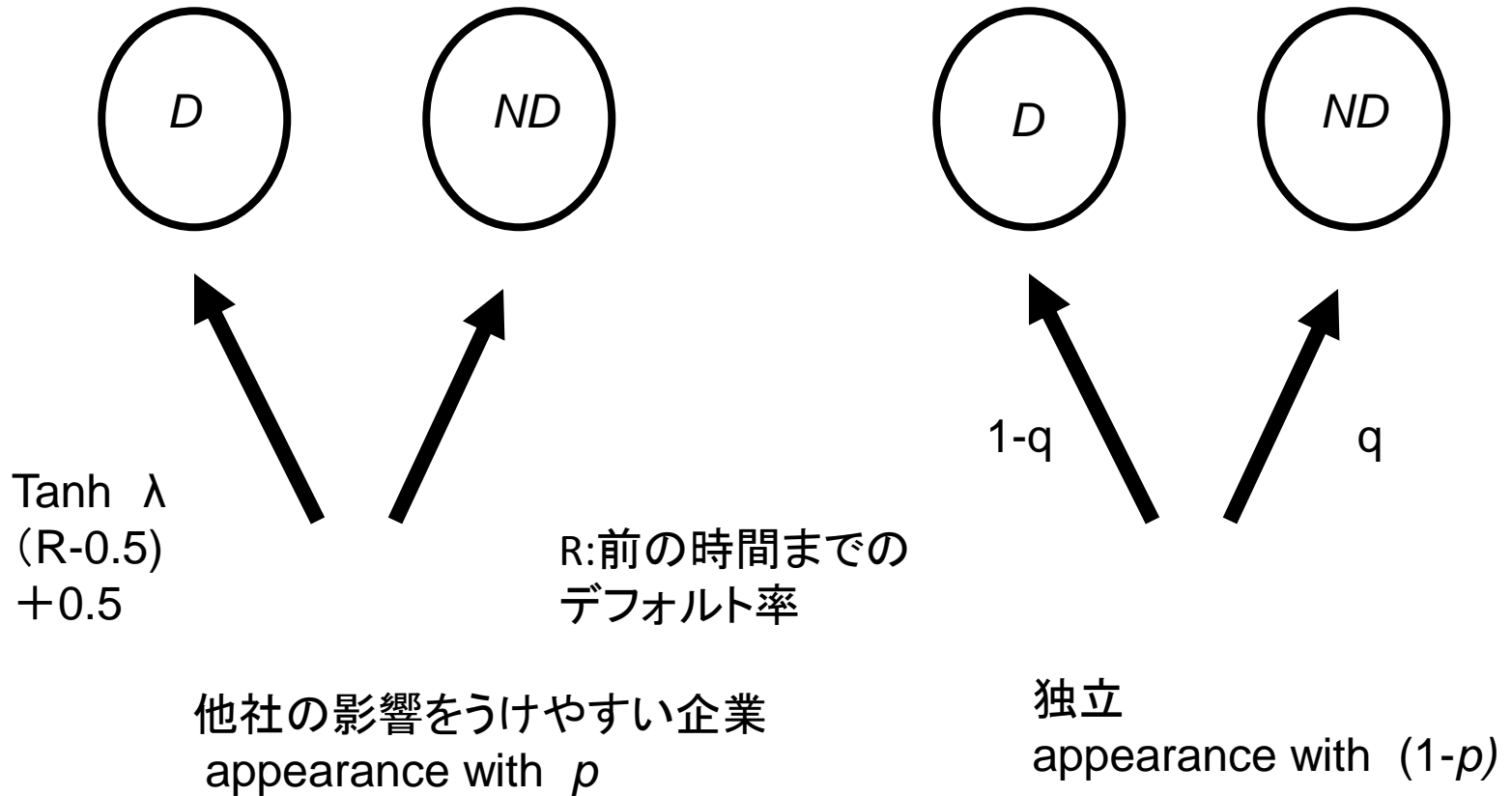
一影響はデフォルト、ノン・デフォルトが決定された企業すべてから影響を受けると考える

アナログ＝線形に連鎖



If $R=1/2$, herders vote for C_0 with $1/2$.

Tanh タイプ=非線形に連鎖

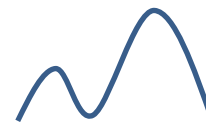


If $R=1/2$, herders vote for C_0 with $1/2$.

周りからの影響が線形ではなくTanh型の関数
極限状態($\lambda \rightarrow \infty$)でヘビサイド関数=デジタル



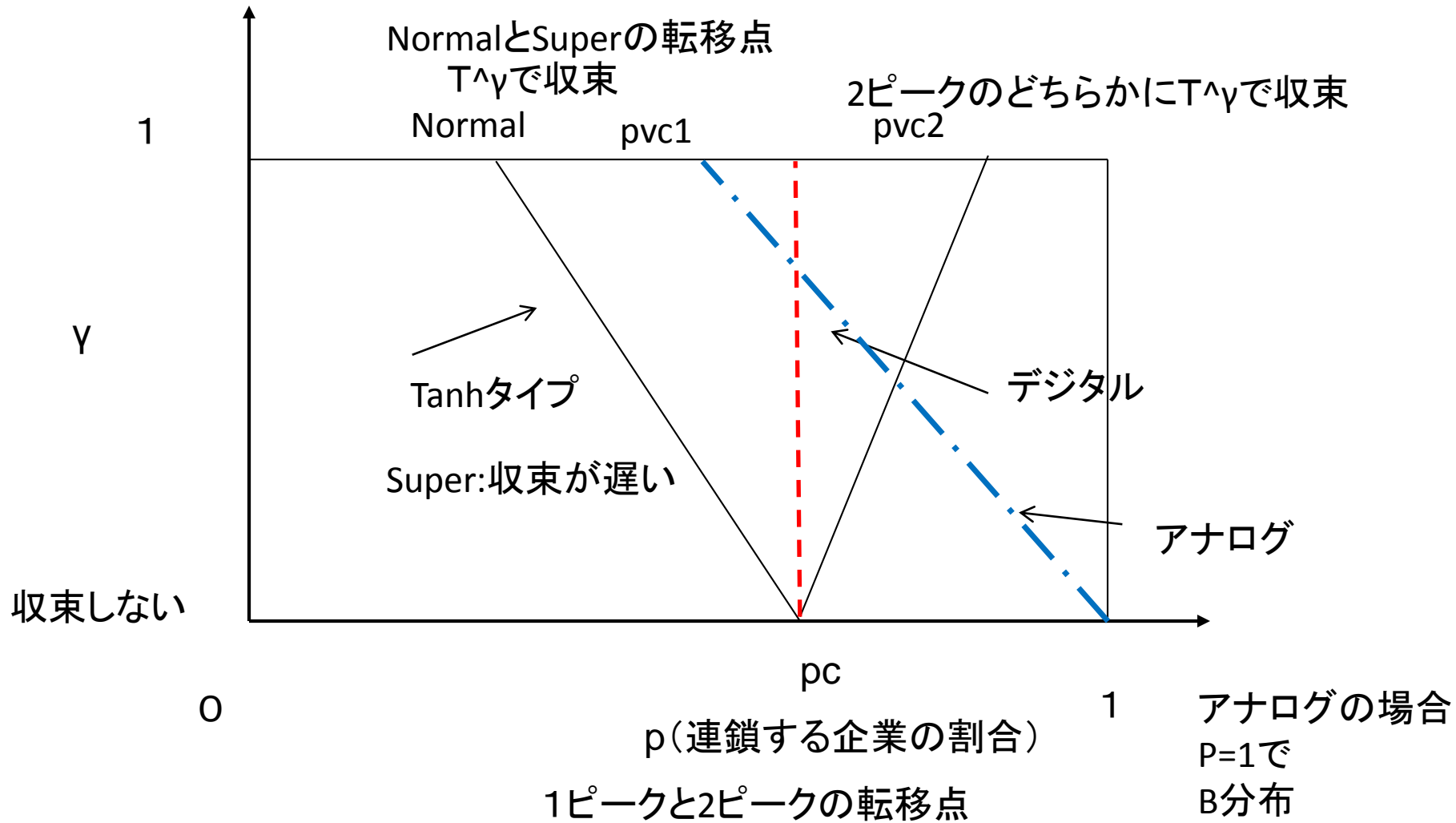
Self averaging
収束する



Non self averaging
収束しない

one peak phase

two peak phase



問題2

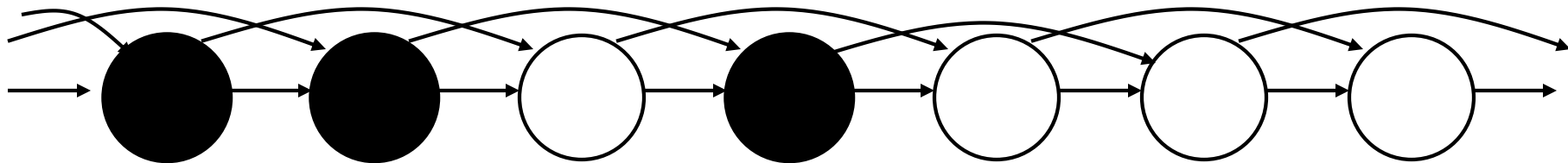
- 線形の場合はイジング型の相転移はない。→ピークは1つ
- 全部の企業がハーダー(周りからの影響を受ける)の場合、 β 分布になる。
(通常のコピュラはこの場合に近い)
- 非線形の場合は連鎖倒産(相転移)がおこる場合がある。
- これらの結果はD,NDが決まったすべての企業の影響を受ける場合。

Q.ではこのモデルをネットワークの上にした場合どのような影響をうけるか？

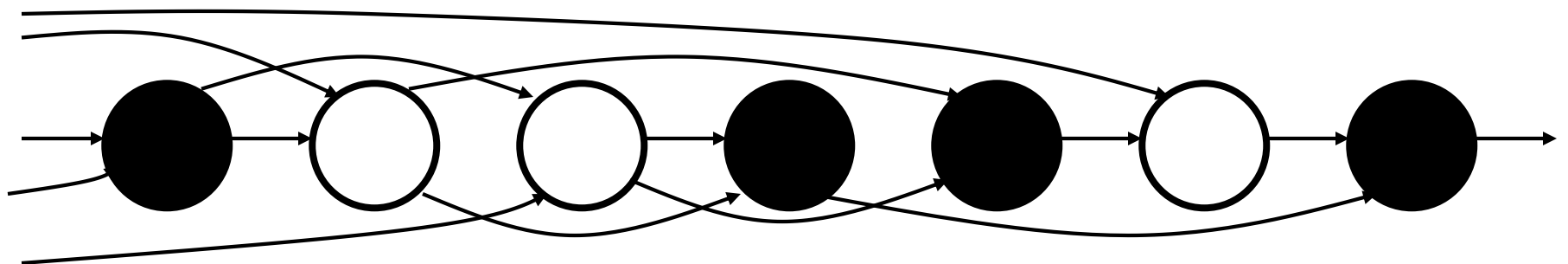
以下、デジタルの場合を考える。

マルコフ・プロセスをネットワーク上で行う

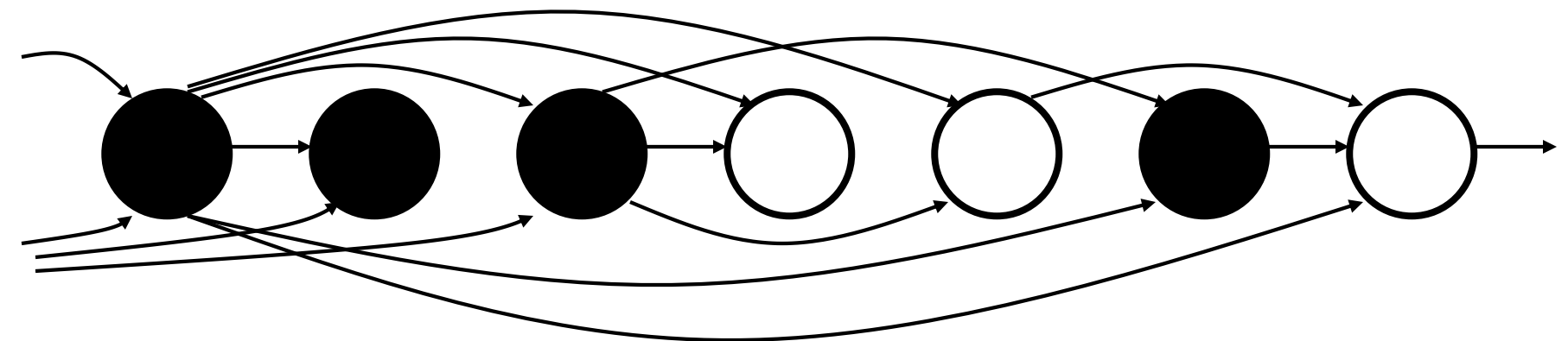
- 今までは参照をデフォルト、ノン・デフォルトが決定された企業すべてから影響を受けると考えていた。
- すべてではなく選択されたr社の企業から影響を受けると考える。→ネットワーク
- 影響を受けた企業は矢印で表示する。
- この矢印の集合がネットワークになる。
(→は影響を与える企業から影響を受ける企業へ)
- 反応関数はデジタルとアナログの場合を考える。
(デジタルは参照企業の過半数がデフォルトしていればD)



① 1D extended lattice $r=2$ 隣の2つの企業から影響を受ける。

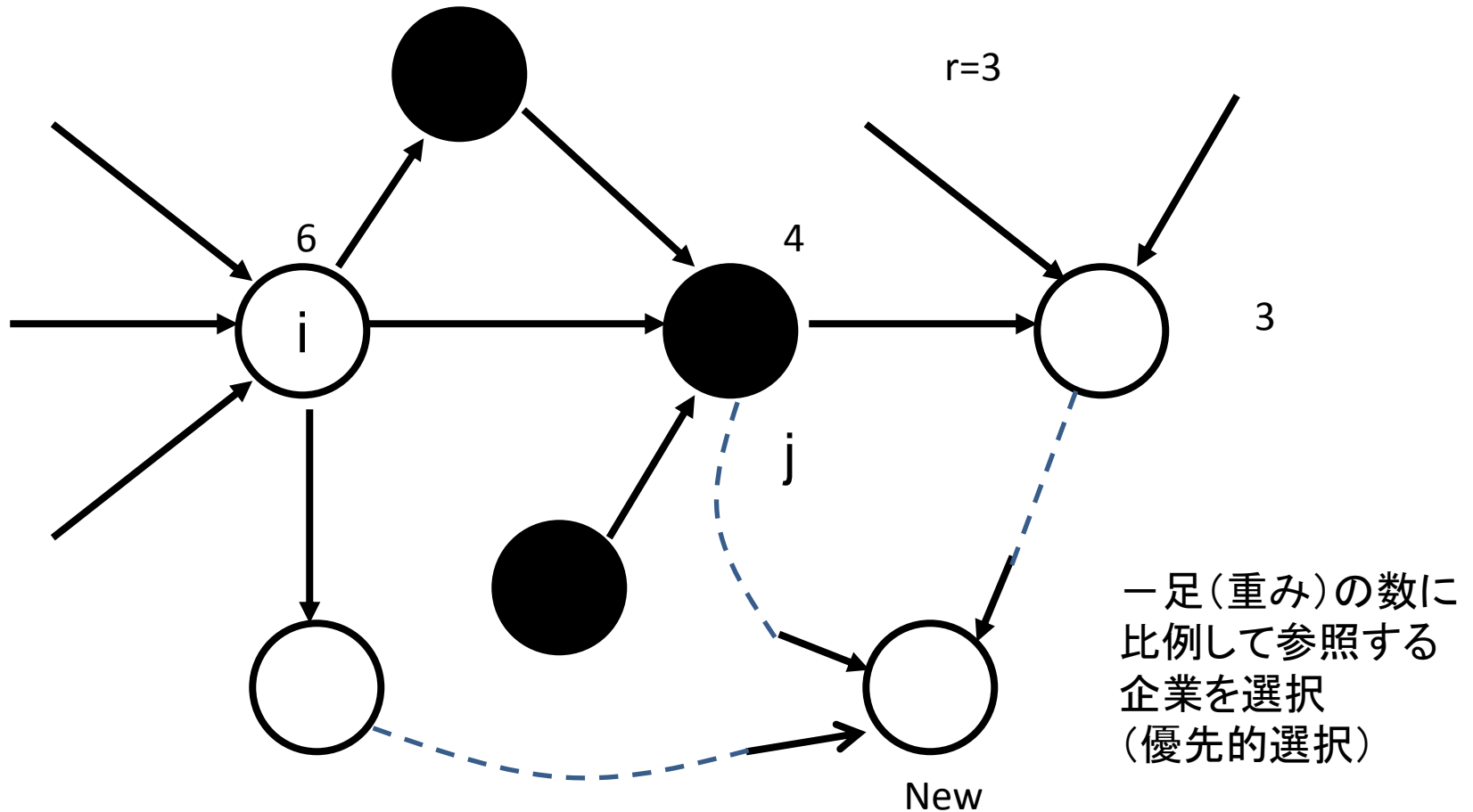


② Random Graph $r=2$ ランダムに選ばれた2つの企業から影響を受ける。



③ BA Model $r=2$ 重みによって選ばれた2つの企業から影響を受ける。

バラナシ・アルバート・モデル(BAモデル)

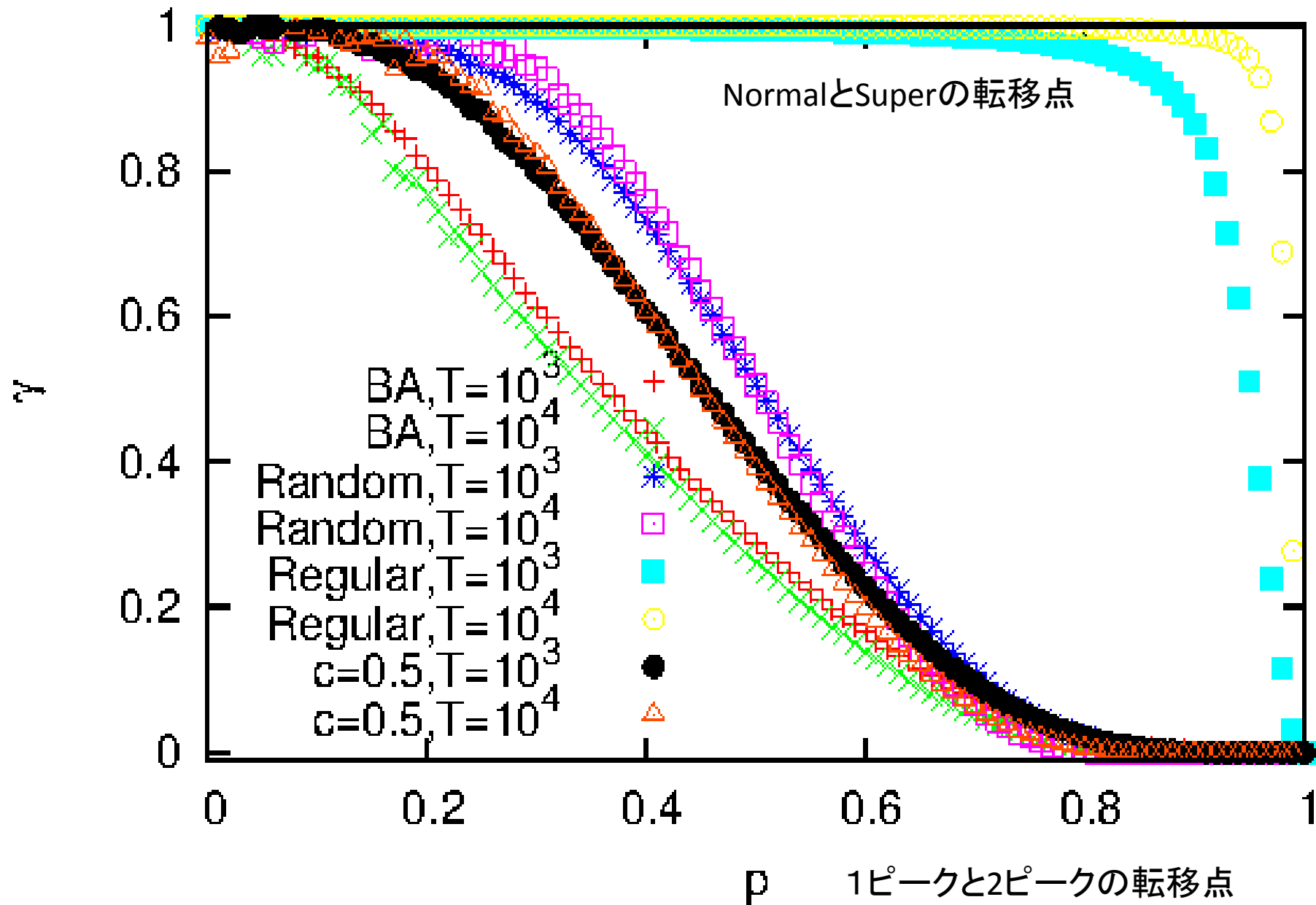


BAモデルの特徴

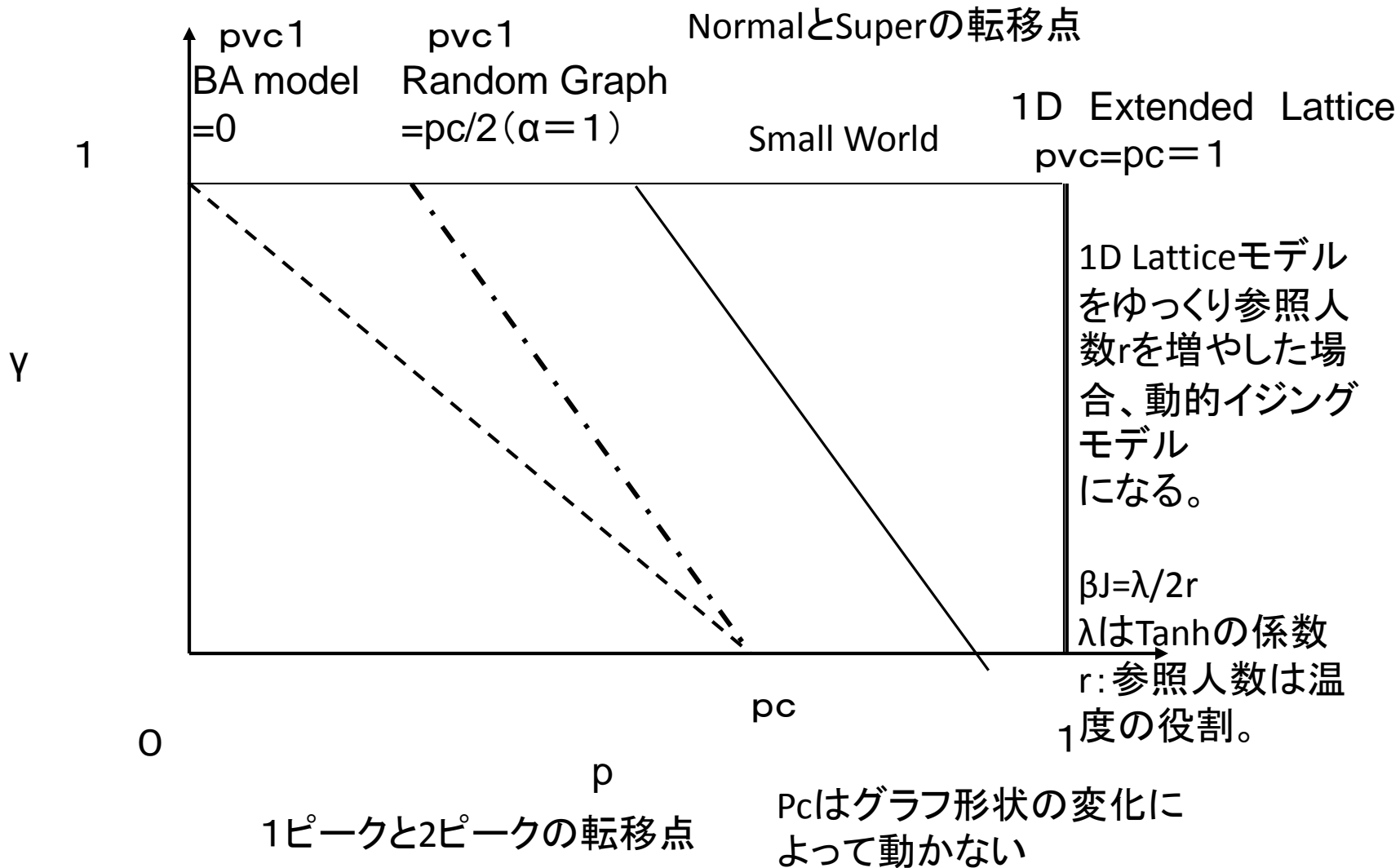
—ハブが存在する。→べき指数が3→足をたくさんもつ企業が存在する。

Note: 元はサイモンの1955の論文

シミュレーション結果 $r=3, q=0.5$



平均場の結果(デジタル) $q=0.5$ の場合



シミュレーション結果(デジタル)

1D拡張格子モデル

- 相転移は2種類ともない。
- 2つの準均衡点の間を振動する。
- 有限サイズ r の動的イジングモデル(無限レンジ・モデル)。(Tanhタイプの場合)

ランダム・グラフ(r : 参照人数 ≥ 3)

- 相転移は2種類存在し、相転移点は p_c と $p_{vc} = 1/2p_c$

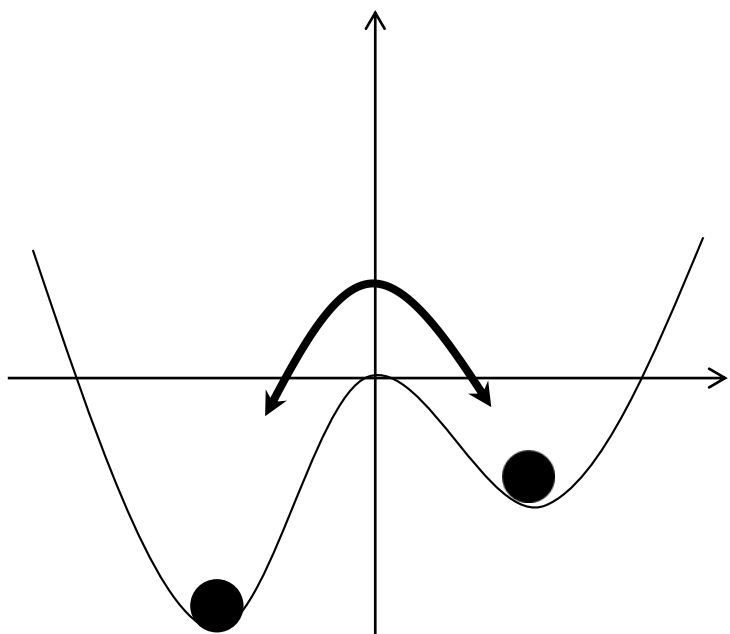
BAモデル(r : 参照人数 ≥ 3)

- 相転移は1種類で p_c のみ。
- ノーマル相はなくスーパー相のみ。(収束速度が遅くなる相)

まとめ

- 1ピークと2ピークの相転移点 P_c はネットワークの形状によって変わらない。
- Normal Superの転移点はネットワークの形状により変化する。

1D格子の場合



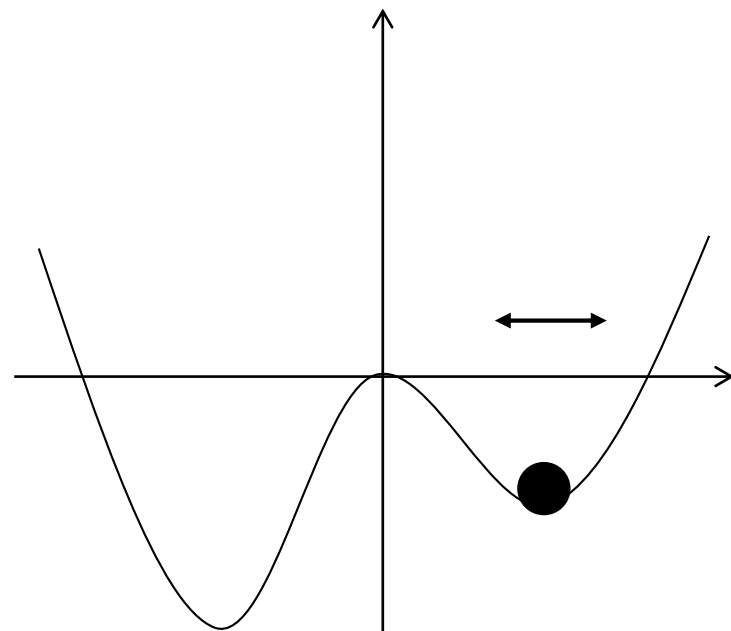
Dが少数

Dが多数

(a) 振動

1独立のPD<0.5の場合
深い谷がNDが多数
浅い谷がDが多数

ランダム・グラフ BAモデル



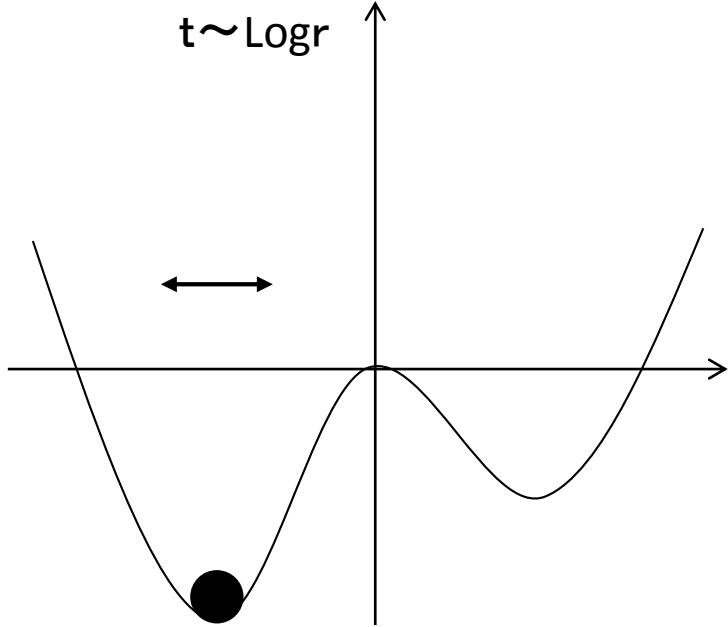
Dが少数

Dが多数

(b) どちらかの底に落ちる

2PD=0.5の場合は等しい深さになる。

1D格子
ゆっくり r を増やしていく場合
 $t \sim \text{Log}r$

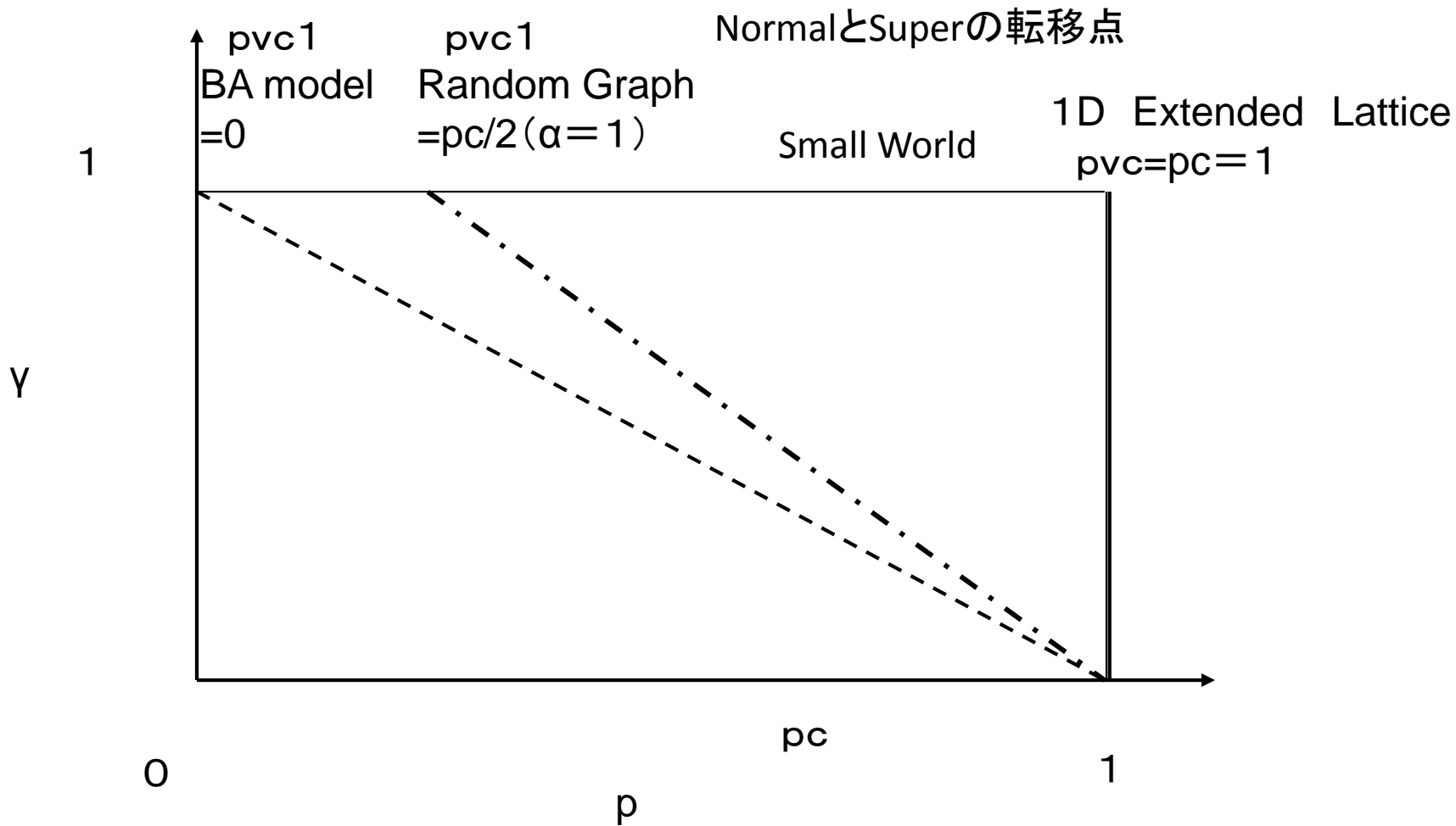


Dが少数 Dが多数
(c) 必ず深い谷に落ち込む

独立は外場に相当する。

イジング・モデルは外場がある場合、相転移は起こらないが、この現象に対応する。

平均場の結果(アナログ) $q=0.5$ の場合



1ピークと2ピークの転移点

2ピークへの相転移はネットワークの形状にかかわらずおきない。

シミュレーション結果(アナログ)

1D拡張格子モデル

- 相転移は2種類ともない。
- カーマンの蟻コロニー・モデル。

ランダム・グラフ

- 相転移は収束速度の1種類(Super Normal)のみ存在し、相転移点は $p_{vc} = 1/2$

BAモデル

- 相転移は収束速度の1種類で相転移点は $p_{vc} = 0$ 。
- ノーマル相(通常の収束)はなくスーパー相(遅い収束)のみ。

まとめ

- 1ピークと2ピークの相転移はなく、ネットワークの形状によって変わらない。
- Normal Superの転移点はネットワークの形状により変化する。

まとめ

分布＝他社への影響力×ネットワークによる影響 の合わさったものになる。

★他社への影響力：線形（アナログ）か非線形（Tanh型）かデジタルか？

★ネットワーク：ハブは存在するか？

結論

－ネットワークの形状の影響は収束速度のみ。（Super Normal転移のみ）

－収束は遅くなる。（ハブの影響により）

－分布の形状変化（相転移）についてはネットワークの形状は影響をおよぼさない。

劇的な連鎖倒産はネットワークの影響というよりは他社への影響力による。

Q.山火事が広がる原因はハブの存在orその他の状況？

A.その他の状況→感染度

（少なくともハブの存在は相転移（カスケード）に与える影響は限定的）

ご清聴ありがとうございました。

M.Hisakado and S.Mori
Phase transition of Information cascade on
network
ネットワークの効果について。準備中。

M.Hisakado and S.Mori
Information cascade, Kirman's ant colony
model and Ising model
Preprint.
<http://arxiv.org/pdf/1401.4258.pdf>
Isingとの関係

M. Hisakado and S.Mori,
Two kinds of phase transitions in a voting
model
J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 345002
Tanhの場合